2020 年 5 月　　计 算 数 学　　第 42 卷第 2 期
May, 2020　　MATHEMATICA NUMERICA SINICA　　Vol.42, No.2

等距丢失模型下的框架张量积重构方法[*1)]

范俊民　冷劲松
(电子科技大学数学科学学院, 成都 611731)

李东伟
(合肥工业大学数学学院, 合肥 230009)

摘　要

框架理论常应用于信号重构. 当编码系数在传输过程中发生等距丢失时, 基于框架张量积的一些性质, 我们可以利用框架张量积对信号进行编码从而降低数据丢失对重构信号的影响. 本文由此提出了一种等距丢失模型, 并在此模型下, 研究了数据等距丢失下的最优对偶框架张量积, 得出了对偶框架和正则对偶框架的张量积是最优对偶框架张量积的两个充分必要条件. 最后数值实验也说明了: 在等距丢失模型下, 最优对偶框架张量积比一般对偶框架张量积的信号重构结果更优.

关键词: 框架; 对偶框架; 张量积; 等距丢失

MR (2010) 主题分类: 65K10, 90C30

1. 引　言

1952 年, Duffin 和 Schaeffer 在文献 [1] 中第一次提出了框架的概念. 随后框架理论开始进入到广大专家和学者的视野中, 并且得到了广泛的探讨和研究. P.G. Casazza 等学者将框架的概念进一步推广到融合框架并且应用于分布式信号处理 [2–7]. 此外, 由于框架的冗余性使得框架在信号重构方面大放异彩, R. B. Holmes 提出了对于数据丢失重构下的最优框架理论 [8]. 在此基础上, 冷劲松以及韩德广等学者首先建立了概率丢失模型, 在这个模型下研究了最优编码模型的选择问题, 并且给出了概率模型下的最优编码框架算法, 进一步推广应用到融合框架 [9,11,12].

在文献 [14] 中, Harbrecht 等学者提出了多层框架稀疏张量积空间, 但是并未研究框架张量积在信号传输中的应用. 受此启发并且结合文献 [8,13], 本文提出了一类利用框架张量积重构信号的方法, 对比直接使用框架重构信号, 使用框架张量积重构信号的时间复杂度更低. 此外, 本文提出了一类等距丢失模型, 并且得出了对偶框架和正则对偶框架的张量积是最优对偶框架张量积的两个充分必要条件, 最后通过数值实验对比了两者对于信号重构的结果.

2. 预备知识

本文作如下基本假设:

$\mathcal{H}$ 是数域 P 上的 Hilbert 空间, 其上标表示 $\mathcal{H}$ 的维数, 如 $\mathcal{H}^N$ 表示维数为 N 的 Hilbert 空间. E 表示数域 P 上的单位矩阵, 其下标表示阶数, 如 E_N 表示 N 阶单位矩阵. I 表示有

[*] 2018 年 04 月 11 日收到.

[1)] 基金项目: 自然基金科研项目结题后新建项目 (LJT10110010115) 资助.

限指标集, 不同上标对应不同指标集, 如 I^1, I^2. 集合 $\mathcal{F}(k,n)=\big\{F|F=\{f_i\}_{i=1}^k$ 且 F 是 $\mathcal{H}^n$ 中的框架 $\big\}$.

定义 1. [18] 设 $A=(a_{ij})\in P^{m\times n}$, $B=(b_{ij})\in P^{p\times q}$, 则

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

称为矩阵 A 和 B 的张量积.

张量积通常有以下性质:

命题 1. [17,18] 设 $A\in P^{m\times n}, B\in P^{p\times q}, C\in P^{r\times s}, D\in P^{k\times h}$, 则:

(a) 共轭转置: $(A\otimes B)^*=A^*\otimes B^*$;

(b) 结合律: $A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C$;

(c) 混合积: 当 $n=r, q=k$ 时, $(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$;

(d) 对于行和范数: $\|A\otimes B\|_1=\|A\|_1\|B\|_1$; 对于列和范数: $\|A\otimes B\|_\infty=\|A\|_\infty\|B\|_\infty$; 对于谱范数: $\|A\otimes B\|_2=\|A\|_2\|B\|_2$.

定义 2. [16] 设指标集 $I=\{1,2,\cdots,k\}$, $\{f_i\}_{i\in I}$ 是有限维 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的向量, 存在常数 $0<a\le b<\infty$, 对于任意的 $x\in\mathcal{H}$ 有:

$$a\|x\|^2\le\sum_{i\in I}\|\langle x,f_i\rangle\|^2\le b\|x\|^2,$$

那么称 $\{f_i\}_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的框架, a 和 b 分别称为框架的下界和上界. 特别地, 当 $a=b$ 时, 称为紧框架; 当 $a=b=1$ 时, 称为 Parseval 框架; 对于任意的 $1\le i\le k$, $\|f_i\|$ 为常数, 则称为一致框架; 框架的分析算子 θ_F 常写成 $\theta_F=F^*$ 的形式, 框架的合成算子 θ_F^* 常写成 $\theta_F^*=F$ 的形式, 框架算子 s_F 常写成 $s_F=\theta_F^*\theta_F=FF^*$ 的形式; $\{s_F^{-1}f_i\}_{i\in I}$ 也是 $\mathcal{H}$ 中的框架, 称为 $\{f_i\}_{i\in I}$ 的正则对偶框架, 记作 $\bar{F}=\{\bar{f}_i\}_{i\in I}$, 正则对偶框架是唯一的, 并且 $\bar{F}F^*$ 是 $\mathcal{H}$ 中的恒等算子.

定义 3. [16] 设 $F=\{f_i\}_{i\in I}\in\mathcal{F}(k,n)$, $\{\tilde{f}_i\}_{i\in I}$ 是 $\mathcal{H}^n$ 中的向量序列, 则 $\tilde{F}=\{\tilde{f}_i\}_{i\in I}$ 称为框架 F 的对偶框架, 如果满足下列公式:

$$x=\sum_{i\in I}\langle x,f_i\rangle\tilde{f}_i=\sum_{i\in I}\langle x,\tilde{f}_i\rangle f_i,\quad \forall x\in\mathcal{H}.$$

框架 $\tilde{F}$ 是 F 的对偶框架的充分必要条件为:

$$\tilde{f}_i=s_F^{-1}f_i+u_i,\quad \forall i\in I,$$

其中 $U=\{u_i\}_{i\in I}$ 满足: $\forall x\in\mathcal{H}, \sum_{i\in I}\langle x,f_i\rangle u_i=0$. 对偶框架是正则对偶框架的充分必要条件为:

$$\tilde{f}_i=s_F^{-1}f_i\text{或者}u_i=0,\forall i\in I.$$

这也说明了对于任意一个框架, 其对偶框架都是不唯一的.