

# 基于线性代数的大规模快速量纲分析算法及其在爆炸与冲击工程研究中的应用\*

钟巍

(西北核技术研究院, 西安 710024;  
北京大学数学科学学院, 北京 100871)

田宙

(西北核技术研究院, 西安 710024)

寿列枫

(西北核技术研究院, 西安 710024;  
北京理工大学爆炸科学与技术国家重点实验室, 北京 100081)

## 摘要

量纲分析是科学研究, 特别是工程应用中非常重要的一个理论分析工具. 从 E.Buckingham 提出  $\Pi$  定理开始算起, 量纲分析已有一百多年历史, 其基本理论和方法已经非常成熟, 在各个领域也取得了显著的成果并且仍然有着广泛的应用. 然而, 随着研究的深入, 面对的问题越来越复杂和细致, 人们越来越关注在传统量纲分析中忽略掉的一些所谓次要因素的影响, 因此涉及的物理量变得越来越多, 导致按传统的量纲分析方法处理时常常显得非常繁琐甚至困难. 本文从线性代数的观点出发, 将量纲分析转换为线性空间问题, 通过矩阵运算, 完成量纲分析的关键过程. 给出了量纲分析对应的线性代数问题的基本定理, 并基于这些定理建立了程序化的量纲分析算法, 将原本复杂的量纲分析问题转化为借助计算机代数系统能够快速方便解决的矩阵运算问题. 最后, 结合笔者多年的工作经历, 给出了上述方法在爆炸与冲击工程研究领域中的若干应用实例, 详细表述了具体操作步骤, 验证了算法的优越性.

**关键词:** 量纲分析;  $\Pi$  定理; 线性空间; 矩阵运算; 程序化算法

**MR (2010) 主题分类:** 00A06, 15A03

## 1. 引言

量纲分析被称为科学研究和工程应用中的一项“锐利武器”, 它在处理尚未找到现成的数学方程来表述的复杂物理现象或问题时起着重要的作用. 我国著名科学家钱学森前辈曾提到, “由于爆炸力学要处理的问题远比经典的固体力学或流体力学要复杂, 似乎不宜一下子想从力学基本原理出发, 构筑爆炸力学理论. 近期还是靠小尺寸模型实验, 但要用比较严格的无量纲分析, 从实验结果总结出经验规律. 这也是过去半个多世纪行之有效的力学研究方法<sup>[1]</sup>.” 虽然距离钱学森前辈说这段话已经快 40 年了, 爆炸力学理论也有了长足的发展, 但这并没有改变量纲分析在处理一些复杂未知的新问题时的优势和地位, 并且这不仅仅适用于爆炸力学问题, 同样适用于所有其他领域的复杂问题. 量纲分析有着悠久的发展历史: 1822 年, J.B.J. Fourier 首次提出量纲的科学概念, 将其从几何学推广到物理学范畴<sup>[2]</sup>. 1871 年, J.C. Maxwell

\* 2018 年 5 月 23 日收到.

提出 Maxwell 幂次律, 指出对于力学问题来说, 在 L-M-T 系统中任一物理量的量纲均可表示为 L、M、T 的幂次之积<sup>[3]</sup>. 1871 年, L. Rayleigh 使用量纲分析在天空的颜色的研究中取得成功<sup>[4]</sup>, 后来又在流体动力学稳定性以及流动阻力等方面使用量纲分析作出了开创性的贡献, 对推动二十世纪航空工业的发展产生了重要的影响. 1883 年, O. Reynolds 做了有名的雷诺实验 (圆管内流动的转捩), 给出了历史上首个无量纲数  $Re = \rho v D / \mu$  (1908 年被命名为雷诺数), 流动从层流到湍流的转捩取决于雷诺数的大小<sup>[5]</sup>. 1914 年, E. Buckingham 建立量纲分析与相似理论的  $\Pi$  定理, 他指出“每个物理定律都可以用几个无量纲量 (称之为  $\Pi$ ) 来表述, 而且问题中的各无量纲数之间满足一定的函数关系”<sup>[12]</sup>, 这在后来被人们称为  $\Pi$  定理<sup>[7]</sup>, 并成为量纲分析中最基本和最重要的定理.  $\Pi$  定理的提出标志着量纲分析理论体系的正式建立, 此后, 量纲分析被广泛应用于各个领域. 时至今日, 量纲分析仍然是科学研究和工程应用中重要的理论分析武器. 近两百年来, 量纲分析取得了大量卓越的成就, 例如, L. Prandtl 在 1904 年巧妙的运用量纲分析方法把粘性流体运动方程简化为容易求解的边界层方程, 提出了边界层理论<sup>[6]</sup>, Prandtl 的边界层理论的提出引起流体力学产生质的飞跃, 逐渐使流体力学成为设计和制造飞机的理论基础, 为近现代航空事业的发展作出了重要贡献; 1945 年, 英国科学家 G.I. Taylor 通过研究美国第一颗原子弹爆炸试验的录像带, 使用量纲分析方法建立数学模型, 对这次核爆炸释放的能量进行了估算, 得出的当量与实际当量非常接近<sup>[8, 9]</sup>.

本文结构如下: 第二节简单回顾量纲分析的一些基本知识; 第三节先建立量纲分析的线性空间描述, 并提出几个相关的定理与证明, 然后基于上述内容给出大规模快速量纲分析程序化的算法; 第四节结合笔者多年的工作经历将本文算法应用于爆炸与冲击工程研究领域中的一些应用实例; 第五节是结束语.

## 2. 预备知识

本节概述下文中用到的符号和基本知识.

“量纲”是人们为了便于辨识某类物理量和区分不同物理量, 即用来表示物理量的基本属性的术语. 通常按照物理量的大小与度量时是否与所选用的单位有关, 将物理量分为有量纲量和无量纲量: 物理量的大小与度量时所选用的单位有关的量, 称为有量纲量, 否则称为无量纲量<sup>[10]</sup>.

**注 1.** 对于物理量  $q$ , 按照国际标准其量纲记为  $\dim q$ , 或者按照国际物理学界沿用的习惯记为  $[q]$ .

**注 2. (物理常识)** 在国际单位制中, 规定了 7 个基本量, 这 7 个基本量是相互独立的, 其单位和量纲如表 1 所示, 基本量对应的量纲称为基本量纲. 其他任意物理量  $q$  均可以通过相关的某种物理定律用这 7 个基本量表示出来, 故在量纲上存在

$$[q] = L^\alpha M^\beta T^\gamma I^\delta \Theta^\epsilon N^\zeta J^\eta. \quad (2.1)$$

式中  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta$  称作量纲指数. 在实际物理问题中, 这些量纲指数都是有理数, 并且为了更好的描述物理问题, 它们通常都是一些很常见的整数或分数, 在现有的问题中, 还没有出现很极端的取值, 如绝对值非常大或者非常小的数等.

**例 1.** 对于速度  $v$ , 单位为 m/s, 故其量纲表示为  $\dim v = LT^{-1}$  或者  $[v] = LT^{-1}$ .

**定理 1. (量纲和谐原理)** 用数学公式表示一个物理定律时, 等式两端的每一项必须保持量纲一致.