抛物型界面问题的变网格有限元方法*1)

关宏波 洪亚鹏
(郑州轻工业大学数学与信息科学学院, 郑州 450002)

摘 要

本文针对抛物型界面问题, 提出了一种线性三角形变网格有限元方法. 其主要思路是针对空间变量采用有限元离散, 对时间变量采用差分离散, 但是不同时刻的有限元剖分网格可以不同. 在不引入 Ritz 投影这一传统分析工具的情况下, 得到了最优误差估计结果, 使得证明过程更加简洁. 给出的数值算例验证了理论分析的正确性.

关键词: 界面问题; 线性三角形有限元; 变网格; 最优误差估计

MR (2010) 主题分类: 65N30, 65N15

1. 引 言

界面问题在许多工程问题中有着重要应用, 如分层介质中的热传导、波传播, 流体力学中的多相流、激波, 电磁场问题中强电流击穿绝缘材料等等. 通常当研究对象具有两种或多种介质时, 由于其具有不同的密度、传导性或扩散性等物理性质, 此时就产生出上述界面模型问题 (见文献 [1,2]), 其解析解经常具有较低的正则性, 于是研究具有一定精度的数值算法就显得十分有意义. 早在 1970 年, 著名有限元大师 Babuška 在文献 [3] 中将椭圆型界面问题化为一个等价的极小值问题, 利用有限元方法求解, 在要求已知较多关于精确解及界面信息的前提下, 得到了能量模意义下的次优误差估计结果, 后续的相应有限元方法也都围绕此项成果而展开. 浸入有限元方法 (如文献 [4,5]) 算得上是一个处理界面问题比较有效的方法, 其主要优势体现在网格剖分不受界面形状及位置限制, 所采用关键技巧是在界面穿过的单元上对基函数采用修正技术, 要求在此类单元内部或边界部分满足所需的跳跃性条件. 最近文献 [6] 又将浸入有限元方法应用于界面型最优控制问题中, 并得到了相应最优误差估计结果. 另一方面, 文献 [7] 针对椭圆型界面问题提出了一种无限元方法, 得到了最优误差估计结果, 然而该方法却要求界面的形状为分段直线段, 对曲线界面情况是不成立的. [8] 得到了有限元方法的最优误差估计结果, 但是其对精确解的正则性假设过高, 不但要求精确解及其外法向导数沿界面方向连续, 而且要求解在每个子区域里具有四阶偏导数. 后来, 陈志明院士与邹军教授取得突破, 他们在文献 [9] 中提出了一个较为简单的 P_1 协调三角形有限元方法, 对光滑界面情形得到在能量模和 L^2 模意义下的次优误差估计结果. 另外该文在注解 2.4 中也指出, 如果精确解在界面附近如果具有 $W^{1,\infty}$ 正则性, 则能量模的误差估计能够达到最优阶. 事实上, 此类方法的主要优势体现在最终合成的总刚矩阵与传统偏微分方程结果一样, 均为对称正定的, 这给数值计算带来诸多便利之处. 随后, 文献 [10] 证明了非协调的线性元也适用于这种情形, 两个印度学者 Sinha 和 Deka 对该此种处理界面问题的方法做了大量的推广和应用, 其中包括给出了该

* 2018 年 7 月 4 日收到.
1) 基金项目: 国家自然科学基金 (11501527), 郑州轻工业大学青年骨干教师基金 (2016XGGJS008)、博士基金 (2015BSJJ070) 及研究生科技创新项目 (2018018) 资助.

注解的详细证明以及应用于其他界面问题等等, 见参考文献 [11, 12] 等. 随后, 邹军教授等人在对界面问题的正则性给出了更为深刻探讨的基础上 [13], 抛弃了界面附近 $W^{1,\infty}$ 这一正则性限制, 而是要求在界面附近的网格剖分满足所谓的"δ - resolved" 条件 (见该文献定义 1), 引入一个拟插值算子, 其中该算子在非界面单元上为一个标准的 clément 插值, 而在界面单元上为修正的 Scott-Zhang 算子, 得到了一般 k 阶有限元逼近下的相应最优阶 L^2 模及局部能量模意义下的最优误差估计结果 (见文献 [14]). 在许多实际问题中, 界面的位置和形状都有可能随着时刻的不同而产生相应的变化, 于是在不同时间节点处采用合适的网格剖分就显得尤为重要. 梁国平院士 (参见文献 [15]) 针对线性抛物问题提出了一种变网格处理方法, 其基本做法是: 对空间域采用有限元方法, 而对时间轴采用差分法, 并且对于不同时间的空间区域可以采用不同的网格. 后续有不少国内外学者将该方法应用到更多的时间相关偏微分方程问题中 [16–18]. 然而对于界面问题的变网格方法, 目前尚未见到有文献正式报道. 本文将采用变网格技术, 结合陈志明院士提出的界面问题处理构思, 采用最低阶的 P_1 三角形协调有限元对抛物型界面问题进行分析, 在不引入传统 Ritz 投影的情况下, 直接利用插值算子进行误差分析, 得到了相应于网格剖分尺寸和时间离散步长的最优阶误差估计结果, 并将该方法进行了推广应用, 从而拓宽了低阶线性有限元的应用范围.

2. 抛物型界面问题

考虑如下抛物型界面问题: 求 $u \in L^2([0,T]; X(\Omega))$, 使得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\beta \nabla u) = f(x,t), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \forall t \in [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\Omega \subset R^2$ 为一个凸多边形区域, Ω^- 为 Ω 内部的一个开区域, 其边界 $\Gamma = \partial\Omega^-$ 也包含于 Ω 内, 并且具有 C^2 光滑性, $\Omega^+ = \Omega - \Omega^-$, 如下图 1 所示. 定义 $X(\Omega) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega^+) \cap H^2(\Omega^-)$, 本文所用到的 Sobolev 空间及模均为标准记法 (参见专著 [19]). (2.1) 满足如下跳跃性条件:

$$[u]_\Gamma = 0, \quad \Big[\beta \frac{\partial u}{\partial n}\Big]_\Gamma = 0, \tag{2.2}$$

这里 $[u]_\Gamma$ 为 u 跨过界面 Γ 的跳度, 而 n 为相应于界面 Γ 处的单元外法向量, 而

$$\beta(x) = \beta^s, \quad x \in \Omega^s, \tag{2.3}$$

其中 $s = +$ 或 $-$.

(2.1) 所对应的变分形式为：求 $u(x,t) \in (0,T] \to H_0^1(\Omega)$, 使得

$$\begin{cases} \Big(\dfrac{\partial u}{\partial t}, v\Big) + a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中

$$a(u,v) = \int_\Omega \beta \nabla u \nabla v dx, \quad (f,v) = \int_\Omega f v dx.$$