线性比式和规划问题的输出空间分支定界算法*1)

高岳林
(北方民族大学数学与信息科学学院, 银川 750021;
宁夏科学计算与智能信息处理协同创新中心, 银川 750021)

张　博
(宁夏大学数学统计学院, 银川 750021;
宁夏科学计算与智能信息处理协同创新中心, 银川 750021)

摘　要

本文旨在针对线性比式和规划这一 NP-Hard 非线性规划问题提出新的全局优化算法. 首先, 通过引入 p 个辅助变量把原问题等价的转化为一个非线性规划问题, 这个非线性规划问题的目标函数是乘积和的形式并给原问题增加了 p 个新的非线性约束, 再通过构造凸凹包络的技巧对等价问题的目标函数和约束条件进行相应的线性放缩, 构成等价问题的一个下界线性松弛规划问题, 从而提出了一个求解原问题的分支定界算法, 并证明了算法的收敛性. 最后, 通过数值结果比较表明所提出的算法是可行有效的.

关键词: 全局最优化; 线性比式和规划; 分支定界; 凸 (凹) 包络; 输出空间

MR (2010) 主题分类: 90C30

1. 引　　言

分式规划问题是非线性全局优化的一个重要分支, 而线性比式和规划问题又是一类特殊的分式规划问题. 在现实生活中, 许多实际问题均可抽象为线性比式和规划模型, 且在经济学 [1]、金融投资 [2]、生产管理 [3] 等领域有着广泛的应用背景. 数十年来它吸引了大量的学者和专家的高度关注; 其次, 从研究的观点来看, 线性比式和规划问题对理论分析和计算求解的方式提出了挑战. 本文主要考虑以下形式的线性比式和规划问题 (LFP):

$$
(\mathrm{LFP}):\begin{cases}\min\ f(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{c_i^Tx+d_i}{e_i^Tx+f_i},\\[2mm] \text{s.t.}\quad Ax\le b.\end{cases}
$$

这里, $p\ge 1$, $A\in R^{m\times n}$, $c_i\in R^n$, $e_i\in R^n$, $d_i\in R$, $f_i\in R$. 假设 $X=\{x\in R^n|Ax\le b\}$ 是非空有界闭集.

根据 $e_i^Tx+f_i$ 的连续性以及介值定理可知, 对任意的 $x\in X$ 有 $e_i^Tx+f_i>0$ 或者 $e_i^Tx+f_i<0$. 如果存在某一个 $i\in\{1,2,\cdots,p\}$ 使得 $e_i^Tx+f_i<0$, 用 $\frac{-(c_i^Tx+d_i)}{-(e_i^Tx+f_i)}$ 替代 $\frac{c_i^Tx+d_i}{e_i^Tx+f_i}$,

* 2018 年 7 月 25 日收到.
1) 基金项目: 国家自然科学基金 (11961001), 宁夏高等教育一流学科建设资助项目 (NXYLXK2017B09), 北方民族大学重大专项 (ZDZX201901) 资助.

使得所有分式项的分母项均大于零; 为了方便起见, 假设此时, $e_i^T x+f_i>0$, $c_i^T x+d_i<0$ 时, 用 $\frac{c_i^T x+d_i+M(e_i^T x+f_i)}{e_i^T x+f_i}$ 替代 $\frac{c_i^T x+d_i}{e_i^T x+f_i}$, 其中 M 是一个充分大的正数, 满足对所有的 $x\in X$, $c_i^T x+d_i+M(e_i^T x+f_i)\geq 0$, 问题 (LFP) 的本质不变. 因此, 这里不失一般性, 假定对所有的 $i=1,2,\cdots,p$, 均有 $c_i^T x+d_i\geq 0$, $e_i^T x+f_i>0$.

此外, 问题 (LFP) 可能拥有多个局部最优解, 这样会干扰寻找全局最优解, 使问题的难度增加, 因此研究此类问题是必要的. 本文为上述比式和规划问题建立了一个分支定界算法. 首先, 通过引入新的辅助变量将原问题转化为其等价问题, 然后利用凸凹包络的思想对等价问题目标函数和约束函数进行松弛, 并基于此操作构造出能够为原问题提供可靠下界的线性松弛规划问题. 最后, 利用分支定界的思想设计出关于本文问题的一个新的分支定界算法.

到目前为止, 已经有许多全局优化算法可以用来求解线性比式和规划问题. 比如, 参数单纯形法 [4], 图象空间法 [5], 分支定界系列算法 [6−11], 单调优化法 [12], 区间分裂算法 [13] 等. 2016 年, Jiao 等 [14] 提出了一种新的用于全局求解线性比式和问题的分母输出空间的区间缩减分支定界算法. 2017 年, Shen 等 [15] 通过对一个定义恰当的非均匀网格的探索, 来解决了一个等价的优化问题, 提出了一种完全多项式时间近似算法; 同年, 胡勇文等 [16] 提出了一种求解低维线性分式规划的新的分支定界算法; 最近, Shen 等 [13] 又提出了求解线性分式规划的区间分裂算法; 所有的这些算法能够很好的求解线性比式和规划问题; 其他算法请参考文献 [17,18].

本文后续章节布局如下: 第二节首先将原问题转化一个等价问题并给出等价问题线性松弛的过程; 第三节给出了超矩形剖分方法以及相应的分支定界算法, 并证明了算法的收敛性; 第四节通过数值实验说明了我们提出的算法是有效可行的; 第五节为结论.

2. 等价问题以及线性弛规划

2.1. 等价问题

以便等价问题的建立, 首先引入 p 个辅助变量, 令 $t_i=\frac{1}{e_i^T x+f_i}$, $t_i>0$, $i=1,2,\ldots,p$, 那么问题 (LFP) 可以进一步转化为以下等价问题:

$$
(\mathrm{ELFP}):\begin{cases}\min\ f(x,t)=\sum_{i=1}^{p}t_i(c_i^T x+d_i),\\ \text{s.t.}\ \ t_i(e_i^T x+f_i)=1, i=1,2,\cdots,p,\\ \qquad x\in X=\{x\in R^n|Ax\leq b\}.\end{cases}
$$

定理 1. 可行解 x^* 是问题 (LFP) 的全局最优解的充分必要条件是问题 (ELFP) 的全局最优解是 (x^*,t^*) 并且对每一个 $i=1,2,\cdots,p$ 都有等式 $t_i^*=\frac{1}{e_i^T x^*+f_i}$ 成立.

证明. 若 x^* 是问题 (LFP) 全局最优解, 则令 $t_i^*=\frac{1}{e_i^T x^*+f_i}$, $i=1,2,\cdots,p$. 那么 (x^*,t^*) 是问题 (ELFP) 的可行解并且目标函数值为 $f(x^*)$. 令 (x,t) 是问题 (ELFP) 的任意可行解, 显然有

$$
t_i=\frac{1}{e_i^T x+f_i}, i=1,2,\cdots,p.
$$