2020 年 5 月　　计 算 数 学　　第 42 卷第 2 期
May, 2020　　MATHEMATICA NUMERICA SINICA　　Vol.42, No.2

求解带 Toeplitz 矩阵的线性互补问题的一类预处理模系矩阵分裂迭代法*1)

吴敏华
(广东金融学院金融数学与统计学院, 广州 510521)

李郴良2)
(桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西高校数据分析与计算重点实验室, 桂林 541004)

摘　要

针对系数矩阵为对称正定 Toeplitz 矩阵的线性互补问题, 本文提出了一类预处理模系矩阵分裂迭代方法. 先通过变量替换将线性互补问题转化为一类非线性方程组, 然后选取 Strang 或 T.Chan 循环矩阵作为预优矩阵, 利用共轭梯度法进行求解. 我们分析了该方法的收敛性. 数值实验表明, 该方法是高效可行的.

关键词: 模系矩阵分裂迭代方法; 预优共轭梯度法; Toeplitz 矩阵; 线性互补问题

MR (2010) 主题分类: 65F10, 65Y05, 65H10

1. 引　　言

本文中, 我们考虑线性互补问题 (简称 LCP (q,T)), 求一对可行的互补解 w, $z\in \mathrm{R}^n$, 使

$$w=Tz+q\geq 0,\quad z\geq 0,\quad z^Tw=0,\tag{1.1}$$

其中 $T\in R^{n\times n}$ 是对称正定的 Toeplitz 矩阵, $q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)^T\in R^n$.

接触力学问题, 如轮轨问题 [13], 可以转化为线性互补问题进行数值求解, 其系数矩阵往往非常大, 同时具有 Toeplitz 结构的特性. 对于这一类问题, 快速高效的求解方法在过去的几十年里不断被提出. Belsky [3] 将多重网格方法运用至接触问题. Zhao [13] 将多重网格方法嵌套到有效集方法中, 提出了完全多网格方法进行求解. Vollebregt [11] 结合有效集方法和共轭梯度法, 并基于快速傅里叶变换, 提出了一类有效算法.

近年来, 模系矩阵分裂迭代方法成为求解大规模线性互补问题的有效方法之一. Dong [5] 将线性互补问题化为不动点方程迭代求解. Bai [1] 将系数矩阵适当分裂, 提出更具一般性的模系矩阵分裂迭代方法. 相对于求解线性互补问题的传统投影法, 模系矩阵分裂迭代方法具有更好的计算效果, 因此引发了后续很多好的研究工作. Bai [2] 等提出了两级模系矩阵分裂迭代方法. 张 [14] 较为系统的介绍了已有的模系矩阵分裂迭代方法. Li [7] 等提出了求解线性互补问题的一般性的模系矩阵分裂迭代方法, Zheng [16] 等给出了带 H- 阵线性互补问题的加速模系矩阵分裂迭代方法, Zheng 和 Yin [15] 等讨论了松弛模系矩阵分裂迭代方法.

* 2018 年 10 月 14 日收到.

1) 基金项目: 国家自然科学基金项目 (11661027)、广西自然科学基金项目资助 (2015GXNSFAA139014) 和国家重大仪器专项 (61627807) 资助.

2) 通讯作者: 李郴良, Email: chenli@guet.edu.cn.

对于系数矩阵为 Toeplitz 矩阵的线性系统 $Tx=b$, 自 1986 年 Strang 和 Olkin 分别独立使用循环矩阵作为预优矩阵开始, 对于 Toeplitz 系统快速解法的研究蓬勃发展 [4,6,8,9] 得到了许多有效的算法.

本文将结合模系矩阵分裂迭代方法, 根据等价的方程组左端的系数矩阵仍是 Toeplitz 矩阵的特点, 采用 Strang 循环矩阵 [9] 或 T.Chan 循环矩阵 [4] 作为预优矩阵, 用共轭梯度法求解, 从而达到提高计算效率的目标. 从第四节的数值实验结果可以看出, 选择适当的参数 α, 新方法是可行且高效的.

本文结构如下: 在第二节我们给出了必要的概念和定理, 第三节对算法进行介绍, 第四节给出新算法的数值实验, 最后进行总结.

2. 预备知识

矩阵 $A=(a_{ij})\in R^{n\times m}$ 是非负 (正) 的, 若其元素满足 $a_{ij}\geq 0\,(a_{ij}>0)$, 对所有 $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq m$ 成立. 我们用 $|A|=(|a_{ij}|)\in R^{n\times m}$ 表示矩阵的绝对值, A^T 表示矩阵转置, sp 表示矩阵的特征值集合.

若一个矩阵 $T=(t_{ij})_{n\times n}$ 中的对角线元素 $t_{ij}=t_{i-j}$, 称为 Toeplitz 矩阵, 具体形式如下

$$T=\begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{2-n} & t_{1-n} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{2-n} \\ \vdots & t_1 & t_0 & \ddots & \vdots \\ t_{n-2} & \vdots & \ddots & \ddots & t_{-1} \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_1 & t_0 \end{pmatrix}$$

当 $t_{-k}=t_k(0\leq k\leq n-1)$ 时, 则称矩阵是对称的.

若 f 属于以 2π 为周期的实值函数, f 的傅里叶系数构成矩阵 T 的对角线元素 t_k, 如 $t_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx$, 其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$, 则称 f 为 T 的生成函数. 当 f 为实值偶函数时, 矩阵 T 为实对称矩阵.

我们将 $n\times n$ 的矩阵 V 称为循环矩阵, 假如其元素满足 $v_{-k}=v_{n-k}, 1\leq k\leq n-1$, 如

$$V=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \delta & \eta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta & \delta & \eta \\ \eta & \gamma & \alpha & \beta & \delta \\ \delta & \eta & \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \delta & \eta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

任一循环矩阵 V 都可以用傅里叶矩阵 F 对角化, 且可以知道对角矩阵 Λ 的对角线上的元素 $\lambda_k(k=0,1,\cdots,n-1)$ 的值为 $\lambda_k=\sum\limits_{j=0}^{n-1}v_je^{2\pi ijk/n}$. 因此循环矩阵 V 可以写成 $V=F^*\Lambda F$, 其中 $(F)_{jk}=\frac{1}{\sqrt{n}}e^{2\pi ijk/n}(0\leq j,k\leq n-1, i=\sqrt{-1})$.

在预优共轭梯度法中, 我们主要的计算量集中在两个矩阵向量的乘积中. 一个是关于循环矩阵 (或逆) 与向量的乘积, 即 Vy(或 $V^{-1}y$) 的计算. 因为 F 是一个酉矩阵, 因此我们可以利用快速傅里叶变换很容易将其计算出来. 另一个是关于 Toeplitz 矩阵与向量的乘积, 它也可