2020 年 5 月 计 算 数 学 第 42 卷第 2 期
May, 2020 MATHEMATICA NUMERICA SINICA Vol.42, No.2

子空间约束下矩阵方程 $A^{\mathrm{T}}XB+B^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}A=D$ 的解及最佳逼近*

冯艳昭 张 澜[1)]
(内蒙古工业大学理学院, 呼和浩特 010051)

摘 要

约束矩阵方程求解是指在满足一定约束条件下求矩阵方程 (组) 的解. 在子空间约束条件下, 利用共轭梯度法, 结合线性投影算子, 得到矩阵方程 $A^TXB+B^TX^TA=D$ 的解, 进一步得到其最佳逼近. 最后用数值例子证实了算法的有效性.

关键词: 子空间约束; 共轭梯度; 投影算子; 最佳逼近

MR (2010) 主题分类: 47A05, 65F10

1. 引 言

子空间约束下求矩阵方程的解在建筑学, 生物学, 电学, 振动理论, 非线性规划, 动态分析, 自动控制理论等科学领域都有十分广泛的应用, 而且矩阵理论中许多问题也涉及到矩阵方程求解, 所以对矩阵方程求解具有重要理论价值和实际意义. 关于矩阵方程 (组) 求解的问题已取得丰硕的研究成果. 本文在子空间约束条件下, 运用共轭梯度法及线性投影算子, 讨论矩阵方程 $A^TXB+B^TX^TA=D$ 在相容条件下的解及其最佳逼近. 记 $R^{n\times m}$ 为 $n\times m$ 实矩阵集合, $OR^{n\times n}$ 为 n 阶正交矩阵集合, $K\subseteq R^{n\times n}$ 为 $R^{n\times n}$ 的一子集, A^T 为 A 的转置矩阵. 对任意的矩阵 $A,B\in R^{n\times m}$, 定义矩阵内积 $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$, 则由它诱导的范数为 Frobenius 范数, 即 $\|A\|=\sqrt{\langle A,A\rangle}=[\mathrm{tr}(A^TA)]^{\frac{1}{2}}$. 任意的矩阵 $A,B\in R^{n\times m}$, 若满足 $\langle A,B\rangle=0$, 称矩阵 A,B 相互正交. 任意矩阵 $A\in R^{n\times m}$, $B\in R^{n\times m}$, $D\in R^{m\times m}$, 若存在矩阵 $X\in K\subseteq R^{n\times n}$, 满足方程 $A^TXB+B^TX^TA=D$, 则称矩阵方程 $A^TXB+B^TX^TA=D$ 在 K 内相容.

文章中主要研究两个问题

问题 1. 已知矩阵 $A\in R^{n\times m}$, $B\in R^{n\times m}$, $D\in R^{m\times m}$, $K\subseteq R^{n\times n}$ 为任意线性子空间, 若矩阵方程 $A^TXB+B^TX^TA=D$ 在子空间 K 中相容, 求矩阵 $X\in K$, 满足

$$A^TXB+B^TX^TA=D. \tag{1.1}$$

问题 2. 设问题 1 的解集合为 S_E, 对任给的矩阵 $\check{X}\in R^{n\times n}$, 求 $\hat{X}\in S_E$, 使得

$$\|\hat{X}-\check{X}\|=\min_{X\in S_E}\|X-\check{X}\|. \tag{1.2}$$

* 2018 年 11 月 30 日收到.

1) 通讯作者: 张澜, Email: zhanglanfw@163.com.

2. 用迭代法求解问题 1

对任意线性子空间 $K \subseteq R^{n\times n}$, 其正交补空间 $K^{\perp}$ 存在且唯一, 且 $R^{n\times n} = K \oplus K^{\perp}$. 在 $R^{n\times n}$ 上定义线性投影算子 $\mathcal{F}_{\mathcal{K}} : R^{n\times n} \longrightarrow K$, 则任意矩阵 $X \in R^{n\times n}, S \in K$, 有 $\langle X, S\rangle = \langle \mathcal{F}_{\mathcal{K}}(X) + \mathcal{F}_{\mathcal{K}^{\perp}}(X), S\rangle = \langle \mathcal{F}_{\mathcal{K}}(X), S\rangle$. 定义矩阵函数 $f(X) = \frac{1}{2}\|A^TXB + B^TX^TA - D\|^2$, 则 $f(X)$ 是连续可微的, 由参考文献 [10] 得到 $f(X)$ 关于 X 的梯度

$$\nabla f(X) = \frac{\partial f(X)}{\partial(X)} = A(A^TXB + B^TX^TA - D)B^T + A(A^TXB + B^TX^TA - D)^TB^T.$$

通过构造如下的算法程序求矩阵方程的解

(1) 给定线性子空间 K, 已知矩阵 $A \in R^{n\times m}, B \in R^{n\times m}, D \in R^{m\times m}$, 选取初始矩阵 $X_0 \in K$.

(2) 计算

$$\begin{aligned}
R_0 &= D - (A^TX_0B + B^TX_0^TA),\\
G_0 &= AR_0B^T + AR_0^TB^T,\\
P_0: &= \mathcal{F}_{\mathcal{K}}(G_0),\\
Q_0 &= P_0,\\
k: &= 0.
\end{aligned}$$

(3) 如果 $R_k = 0$ 或 $R_k \neq 0, Q_k = 0$, 迭代停止; 否则继续.

(4) 计算

$$\begin{aligned}
X_{k+1} &= X_k + \alpha_kQ_k,\\
R_{k+1} &= D - (A^TX_{k+1}B + B^TX_{k+1}^TA),\\
&= R_k - \alpha_k(A^TQ_kB + B^TQ_k^TA),\\
G_{k+1} &= AR_{k+1}B^T + AR_{k+1}^TB^T,\\
P_{k+1} &= \mathcal{F}_{\mathcal{K}}(G_{k+1}),\\
Q_{k+1} &= P_{k+1} + \beta_kQ_k,\\
k: &= k+1,\\
\text{其中 } \alpha_k &= \frac{\|R_k\|^2}{\|Q_k\|^2}, \beta_k = \frac{\|R_{k+1}\|^2}{\|R_k\|^2}.
\end{aligned}$$

(5) 转回步骤 (3).

这里 α_k, β_k, Q_k 的取法为保证以下引理均成立.

引理 1. 迭代过程中产生的残量 R_i, R_j, Q_i, Q_j, 满足

$$\langle R_i, R_j\rangle = 0,\ \langle Q_i, Q_j\rangle = 0,\ i, j = 0, 1, 2, \cdots, k, k \geq 1, i \neq j. \tag{2.1}$$

证明. (数学归纳法)

因为 $\langle R_i, R_j\rangle = \langle R_j, R_i\rangle$, 所以只需证明 $0 \leq i < j \leq k$ 时, 式 (2.1) 成立.