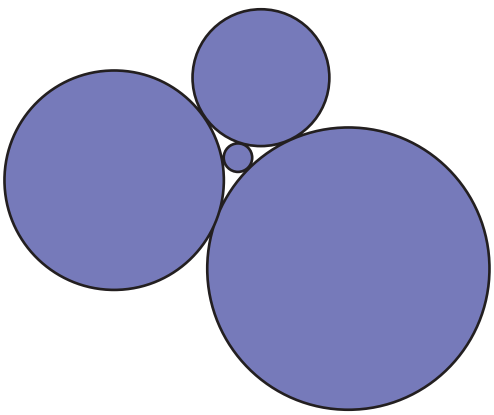
圆圆相吻

When Kissing Involves Trigonometry

David Austin（大卫·奥斯汀）/ 文　　丁 玖 / 译

笛卡尔圆定理

在 1643 年写给波西米亚的伊丽莎白公主（Princess Elizabeth of Bohemia）的一封信中，勒奈·笛卡尔（René Descartes）描述了如下图所示的四个互切圆半径之间的一种优美关系，这个关系现以笛卡尔圆定理为名。



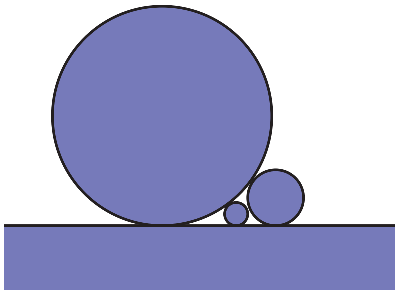
利用圆的曲率（即圆半径的倒数），我们能最简洁地表达笛卡尔圆定理：将第 i 个圆的曲率记为 b_i，则有

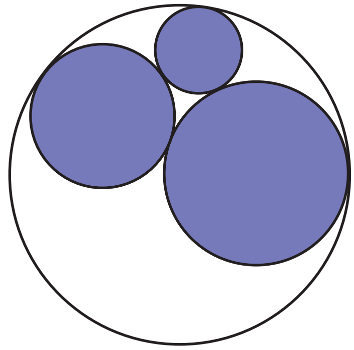
$$b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2=\frac{1}{2}(b_1+b_2+b_3+b_4)^2.$$

我们将一组四个互切圆称为一个笛卡尔配置（Descartes configuration）。

笛卡尔的关系也适用于如下图所示的其他一些看似有点例外的配置。在左下图，直线的曲率被认为是零，而右下图中的外圆曲率被看成是负的。按照这些约定，笛卡尔的关系仍然有效。

这个定理已数次被独立发现。例如，在 18 世纪的日本它就被知道。曾因发现同位素而获得 1921 年诺贝尔奖的化学家弗雷德里克·索迪（Frederick





Soddy），也发现了它的一个证明。他对该定理如此满意，以至于将它以一首诗的形式发表出来，诗名为《精确之吻》（*The Kiss Precise*）。它的开头是这样的：

双唇相交之际，
或许无关三角。
四圆互吻却不然，
每个都吻另三个。

在诗歌的第三节，索迪描述了关于五个互切球面的一个类似结果：它们的曲率平方和等于曲率之和平方的三分之一，即

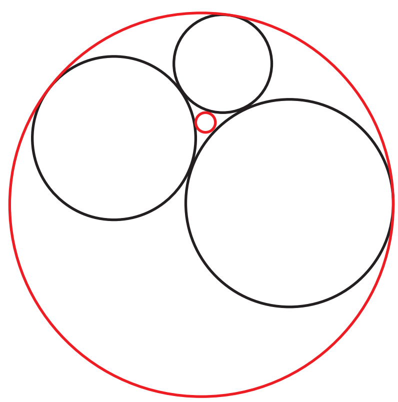
$$b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+b_5^2=\frac{1}{3}(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)^2.$$

下一年，托洛尔德 • 戈塞特（Thorold Gosset）添加了诗歌的第四节，描述 $n+2$ 个彼此互切的 $(n-1)$- 维球面曲率之间的关系，即

$$b_1^2+b_2^2+\ldots+b_{n+2}^2=\frac{1}{n}(b_1+b_2+\ldots+b_{n+2})^2.$$

交换笛卡尔配置

如果我们从三个互切圆（下面用黑色圆圈表示）开始，则可以有两种方式加进红色标记的圆，以构建笛卡尔配置。



这两个新圆曲率之间的关系可以由笛卡尔圆定理来确定。我们将原有三个圆的曲率分别记为 b_1、b_2 和 b_3，将一个笛卡尔配置中的第四个圆的曲率记为 x，则有

$$b_1^2+b_2^2+b_3^2+x^3=\frac{1}{2}(b_1+b_2+b_3+x)^2,$$

得到一个 x 的二次方程

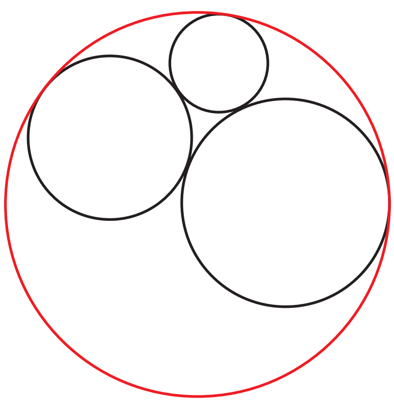
$$x^2-2(b_1+b_2+b_3)x+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)=0.$$

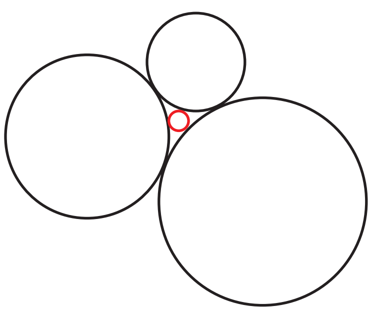
假如将方程的两个根称为 b_4 和 b_4'，我们则发现

$$b_4+b_4'=2b_1+2b_2+2b_3,$$
$$b_4'=2b_1+2b_2+2b_3-b_4.$$

特别地，这给了我们一种产生新的笛卡尔配置的简易方法：从某一个配置开始，我们可以删除这些圆其中的一个，它的曲率称为 b_4，然后用一个曲率为 $b_4'=2b_1+2b_2+2b_3-b_4$ 的新圆取代它。

为了用例子说明之，我们从左下图所示的笛卡尔配置开始，其中四个圆的曲率是 (2, 2, 3, −1)，而曲率为 $b_4=-1$ 的那个圆将被取代。新圆的曲率是 $b_4'=2\cdot2+2\cdot2+2\cdot3-(-1)=15$，所得到的配置由右下图所示。





这个例子说明了另一个十分显著的事实，它也曾经被索迪注意到：由于 $b_4'=2b_1+2b_2+2b_3-b_4$ 这个关系，如果原配置中四个圆的曲率均为整数，则新的配置中圆的曲率也为整数。

被交换的两个圆的曲率只是简单相关，而这些圆本身也通过圆的反演而简单地相关。为了描述这一过程，让我们以一个圆心为 O 的圆开始。在这个圆上反演就像在一条直线上反射：我们将点 P 送到点 P'，使得三点 O、P 及 P' 共线，并且两距离 OP 和 OP' 的乘积 $OP\cdot OP'$ 等于圆半径的平方。

记住我们将直线视为曲率为零的圆，我们就可以说，圆的反演将一个圆转