

2022 国际数学家 大会随想

曾思欣

ICM



国际数学家大会（ICM）每四年召开一次，是全球数学家的盛会，其宗旨是回顾学科的进步，讨论最新的进展，是个热闹的会议。因为俄乌冲突，国际数学联盟（IMU）临时决定将原定于七月六日至十四日在圣彼得堡举行的国际数学家大会 2022 搬到线上，任何人都可以注册参加。笔者因而得以参加并听了几个报告。下面是几则随想。

1. 埃利奥特·利布和微妙的数学物理



2022 年高斯奖获得者利布先生

国际数学家大会颁发的奖项除了菲尔兹奖，还有高斯奖、陈（省身）奖等其他几个奖项。2022 年的高斯奖颁与了普林斯顿物理系退休教授、数学物理学家埃利奥特·利布(Elliott Lieb)。利布老先生当时已经 90 岁了，他在介绍的短片里说：“我一开始就认为物理问题应该用严格的方法来求解，这一点和大部分物理学家不一样。”这句话，道出了数学物理在物理学界的微妙地位。

数学物理，顾名思义就是用数学方法来做物理。在数学系也有这个专

业，那里可以说是研究物理里引申出来的数学问题，这没有任何问题，反正一大半数学都是从物理里来的。但是利布先生一辈子是在物理系，像他这样的用数学方法来做物理的物理学家，还可以包括魏格纳、戴森和杨振宁等人。物理系的鄙视链，最崇拜的是“数学是错的，但物理是对的”，因为这样的工作像是变魔术，令人匪夷所思，简直是艺术品。而鄙视链的另一端则是“数学是对的，但物理是错的”。利布先生这样的数学物理学家很不幸，被当成后者的嫌疑更大些。

戴森曾回忆五十年代初在康奈尔时发展了一套基本粒子的强相互作用理论，和当时的实验数据符合得很好。戴森想得到费米的首肯，于是专门飞到芝加哥拜访费米。费米很友善，听他讲了十分钟后，直截了当地告诉戴森：“我不觉得这个理论有希望。”因为“这个理论既没有正确的物理，也没有漂亮的数学”。戴森不服，说我这个和实验符合得很好啊。费米问：“你用了几个参数？”戴森说三个，费米笑说：“冯·诺伊曼告诉我，给他三个参数他能画出一头大象。”戴森很聪明，回来就停止了这个工作，改做其它的了。多年后他回忆说，事实证明，费米是完全正确的。那时候还没有夸克理论，但费米能在骨子里感觉到什么样的理论应该是对的。这种天才的直觉才是一个物理大师的素质，这在数学能力之外，戴森自言他一辈子学不到。

这种数学和物理认知上的偏差，很多人归结于物理问题的特殊性，这在本次国际数学家大会上也有几个人谈及。比如要研究一个量子系统，数学上首先要构造希尔伯特空间，而真正物理的理解，往往只是在这个希尔伯特空间中的一个非常特殊的小角落里。数学家发展的强大武器，未必真的能抓住这个角落。上个世纪七十年代高能物理的基本模型建立之后，有一个著名的理论难题，就是所谓的“夸克禁闭问题”，在理论上说明为什么夸克不能单独出现。这个问题到现在也没有解决。在2000年时温伯格在标准模型的总结文章里说：“我很高兴这个问题现在留给数学家们了。”这个问题真的被列入了克雷数学研究所的7个世纪难题之一。但是这个难题只是一个数学问题？考虑到物理问题的特殊性，夸克禁闭真的能在数学意义下解决而不需要新的物理？笔者对此也一直存疑。

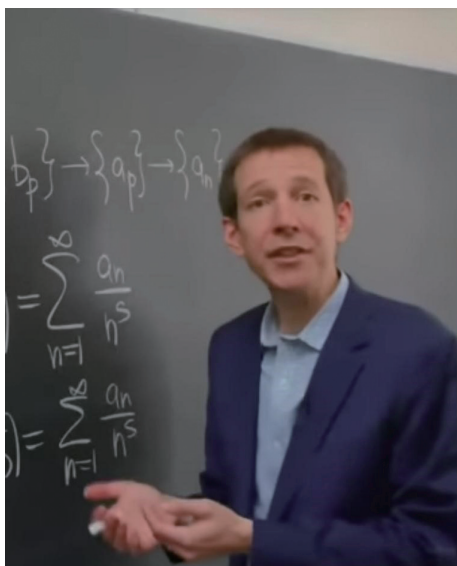
很多时候数学物理学家的选题也反映了他们和一般物理学家的不同。利布先生在70年代的一个著名工作是证明“物质是稳定的”，就是说我面前的桌子，桌上这杯水，都是稳定的，不会突然爆炸。在正统物理学家比如费曼看来，这就是个荒谬的问题，没人见过这些东西爆炸，物理上这个问题显得没有意义。然而从数学角度来看，这是估算一个量子多体系统的束缚能，当然是有意义的，而且还不简单。有趣的是，戴森也做过这个问题，他在回忆录里说：“我们是用经典的数学方法硬做，结果虽然做出来了，但论文写了200页。而利布和蒂林（Walter Thirring）用了正确的物理思路，4页纸就做出来了。”所以利布先生还是有很好的物理直觉的！

无论如何，这次利布先生荣获高斯奖，这是数学界对他一生工作的肯定，是不是也是意味着数学物理向数学界的回归？我们拭目以待。

2. 三十年前的奇迹

被邀请在国际数学家大会上作报告是个很高的荣誉，而兄弟两人同时被邀请则是很罕见了。这次大会上，芝加哥大学的丹尼·卡莱加里（Danny Calegari）和弗兰克·卡莱加里（Frank Calegari）兄弟俩都被邀请作了报告，其中做数论的弟弟弗兰克作了全会报告，做拓扑的哥哥丹尼作了45分钟报告。这兄弟俩来自澳大利亚，都是在伯克利读的博士。

弗兰克·卡莱加里的报告题目是“30年的模表示：费马大定理之后的数论”，这个报告非常精彩，非常值得一听。他的最后一句话“1993年的时候，除了怀尔斯没人知道费马大定理会被证明。数学里总是充满了惊奇”让我感慨。的确，三十年前的这个奇迹，令人难忘。



弗兰克·卡莱加里的报告

那是1993年的暑假，我回国探亲，在北京办签证，那几天就在北大。怀尔斯在英国的一个会议上宣布证明了费马大定理，北大的一位青年教师张绍伟正好参加了那个会议，于是请他来讲讲当时的情形。我记得那个讲座就在数学系一院，是郭（懋正）老师主持的，我和几个同学一起去，听到的内容很新鲜，当然更多是疑问。

1983年时法尔廷斯（Gerd Faltings）发展了算术曲面理论，并证明了莫德尔猜想，它的一个推论就是费马方程 $x^n + y^n = z^n$ ($n \geq 3$) 最多只有有限个有理解。从“有限个解”到“没有解”似乎距离很近了，从那时起费马大定理又进入了很多人的视野。

1987年一个做代数曲面的数学家宫冈洋一（Yōichi Miyaoka）沿着这个思路宣布证明了费马，掀起了很多波澜，最后还是法尔廷斯发现了问题，宫冈洋一承认证明有错。这事轰动一时，好像还登上了北大办的《数学译林》，我们在北大时就知道了。尽管如此，那时我们都觉得，只要算术曲面的理论充分发展，费马大定理肯定有希望。

但是我们那时不知道的是在1985年一个德国数学家弗莱（Gerhard Frey）发现如果费马方程有非平凡解，那么可以构造出一条椭圆曲线，这个椭圆曲线看上去和模曲线非常不同。这个“看上去非常不同”很快在1986年被里贝特（Kenneth A. Ribet）严格证明。另一方面早在60年代人们就猜想所有有理域上的椭圆曲线都是模曲线，这是所谓的Taniyama–Shimura–Weil（TSW）猜想。所以在86年就知道TSW猜想会推出费马大定理。但是TSW看上去可是比算术曲面难多了，好像无从下手。当然怀尔斯不这样看，他在86年一看到里贝