新型冠状病毒的传播与数学的思考

——数据挖掘就是从不确定的甚至是虚假的数据中挖掘出真相

复旦大学数学学院 吴宗敏

大家都在讨论新型冠状病毒的传播规律及机制，大多数人采用的是比较宏观形象思维的方法，就是抓住几个大的影响因子事件，讨论其影响的大小深远及其叠加。这当然是属于一种科学的方法。而且形象思维的方法也是可以数学精确化的，但要取决与你对重大突发事件规模的把控与掌握。因为任何事件的走向，形象地就像个树杈，你如果可以知道每个新的支叉生长点的位置与生长方向，那么，你就可以准确地描述这个树杈了。另一种就比较偏向于微观逻辑思维了，也就是看前面走过的路，来判断后面可能的走向。还是回到树杈，数学一般会引进导数。又要分几种，一种就是用前面很短的一段路程的走向来判断以后的路，这一般很难推断出以后的新分叉的时间节点在哪里？另一种是已经看见几个叉折点了，根据前面的折向规律，分析以后什么时候会产生新的叉折点，折向何处。

数学，首先要讲理由，以什么理由来做这样做预测。如果理由不合理，即使结果对了，那也是算命，不是科学。而数据挖掘就是从不确定的甚至是虚假的数据中挖掘出真相来。下面就从最简单的讲起

刚开始时，数据很少或者人们不愿意看一大堆数据，更喜欢有意义的单个或几个数据。当本篇文章一开始在公众号发表时，就有人来问说，你没有给出预测结果。因为他们更喜欢看，譬如最大值是多少之类这样直接的结果。但是刚开始时，套一个模型去预测是非常危险的。或者说，估计错的可能性是非常大的，数学，科学应该保持有多少把握讲多少话的原则，而且要讲出道理来。

还有一个大问题，不仅样本数据少，还可能不准确。数学认为，错误的数据也是数据！

慢慢来，譬如先不着急估计函数值，可以先对变化曲线的特征进行分析。这些称为曲线的特征点是导数，两阶导数及其它微分算子作用后函数的零点。我们知道 f(t) 与 a*f(t) 甚至 a*f(t)+b*t+c，它们的两阶导数的零点位置是一样的。你可以作假，譬如，你把真实数据打折，但你掩盖不了两阶导数为零的位置。假如获得的数据 f(t) 是不可信的，那么你可以拿 100*f(t)+30*t+3000 来算拐点，得到的拐点位置是一样。数学就是要设计这样的算法，而自动地排除人为的干扰，通常数学的方法要求仿射不变的。我们知道了 100*f(t) 求导后等于零的位置，那么我们同时也得到了 f(t) 求导后等于零的位置，或者说，我们

得到了 f(t)达到最大值的时间，虽然我们还没有办法求得最大值的大小，但我们可以知道什么时候达到最大值。

譬如，数据点基本落在一条直线。做它的平均值，意义在于，在区间中间点上函数值比较接近平均值。但曲线肯定不是就等于这个平均值。我们还要去求导数的平均值，然后通过中间点上的函数值，以导数的平均值画一条直线。这条直线才比较好地反应了样本数据。

当样本数据还是非常少时，人们没有别的方法，通常采用的叫做比例原则或者说线性模型。我们从一些例子开始

1.比例原则：

武汉封城后，某天。数据显示武汉一千四百万人，被封九百万，一段时间内新增约 2000 人患病，外出约五百万人，该段时间内武汉外新增约 4000 人患病。

有人就导出结果，根据比例原则，这个数据造假。五百万人的传染得病数比九百万中的传染得病数还多，比率不对，不符合比例原则。武汉的得病数肯定隐瞒了！

对吗？这个算法思想就是基于比例原则，是假设在武汉时有一个得病比例，然后，500 万人向外传，900 万人内部传，传播的比例是一样的。

这样的假设显然是错的！在外的 500 万人肯定流动性更强，或者说，传染率更大。根据当时的数据，外部传的比例与内部传的比例约为 1：4。也就是说在内部，一个病人在一定时间内传一个人的话，在外部要传四人。1：4 还是相当可信。随着时间的推移，这个比例还会扩大。因为内部会变得更多的是病人传病人，而外部对病毒来说有更好的生存发展空间。

想一想，一个仓库有 100 麻袋大米，每袋 14 公斤。其中一袋发霉了，譬如讲，发霉率是 A。有人看见了用塑料袋把它包起来，可是原麻袋破了，只包起了 9 公斤，另外 5 公斤撒落到了其它麻袋中。以后哪些米更会成为霉菌传播者？毫无疑义，是散落在外的那些大米。讲一个极端的例子，当初 A=1，就是 14 公斤米全坏了，那么包起来的 9 公斤米已经全部霉变，包起来以后就没有好米可以再传播了，而散落在外的霉米还可以传播更多的好米。开始假设的那个 A 越大，这个现象越明显。

另外一个结论是根据日本撤侨，说日本撤侨约 200 人，其中约 10 人得病，所以武汉内部 900 万人，推断武汉约有 40～50 万人得病。这又是一个〝以点带面〞的典型。那么要问一下，1.以飞机为单位，还有多少离开武汉的其它飞机上数据怎样？2.以日本侨民为单位，武汉共有多少日本侨民。在武汉有与传播史密切相关的日中友好医院，日本撤的侨民中，有很大的可能，会有与病人直接接触或间接接触的人员。你不能从一架飞机的患病比例代替所有飞机的患

病比例。不能从从一个患病家庭中的患病比率推断他住的小区的患病比例，也不能用一个小区的患病比例推断整个武汉的患病比率乃至全国的患病比例，对吧？

对于大多数人那些曲线可能都不想看或反应看不懂，那就回到关注重要事件点。1.死亡人数与治愈人数出现交叉。那表示对疾病的严重程度的描述。当然那只是表示了这个病的恶性程度，并不表示新增病例会增加还是减少。2.传播率从小变大，而保持平稳，那可能表示是最大的传播率节点，同时表示接下来传播率会以很大的概率下降。当然可能也是传播率最大的时候。

2. 几何传播：

数据多了些，有几天的的数据了，人们就可以比较前后天的数据变化。也就是我们有了一个与时间相关的函数 f(t)。根据上一节的传播率的概念，应该 f(t+1)=c*f(t)。其中 c 就称为传播率。公布数据较早就宣布了，估计 c＜2.3，比非典的 3 来的小。可是还是有不少人在报道，大的时候连续地显示为 2.1 左右。给人们的印象是永远地这么 2.1 下去了。谣言？也不能算谣言，但定性成误导显然是合理的。

如果 c 传播率是常数，那第一个病人是从哪里来的？几何增长的速度是非常快的。网上有大量的这样的模型出现，我一般会问一句，你的模型，半年后的数据是什么？如果得到的病人数大大地超过了地球总人口的人数，那显然是错误的！所以，几何增长，既不能描述这个病从哪里来？也不能描述这个病会到哪里去？是一个非常粗糙的模型。

传播率一定是变化的，数学上叫做变系数的，一定是从零开始逐渐变大，达到高峰后逐渐变小，最终归零。也就是 c 应该写成 c(t)，是与时间有关的。早期公布的数字 c(t)小于 2.3 还是非常合理的，而且是非常地有预见性的。当看到 c 持续地在 2.1 那里徘徊，那是一件非常值得高兴的事情，表示它可能已经到了最高点，不大可能再会升高了。

有些模型考虑更加深刻一些，加进了克服病毒的阻力，列出了方程 f(t) 的两阶导数是某常数减去 f(t) 导数项。也就是病人数的发展越大，那没受感染的人越少，从而想感染别人的机会越少，碰到的人已经感染了，从而新增的病例会越少。这样画出了一条渐近线，说病人数达到某值时就不会再增加了。这显然是更为进步的模型。最早牛顿就考虑了这个问题。由于空气的阻力，物体的下落不是自由落体，而会有个终极速度。一个人从飞机上跳下来与从 10 层楼上跳下来碰到地面时，摔死的可能性一样。

不过这还不够！

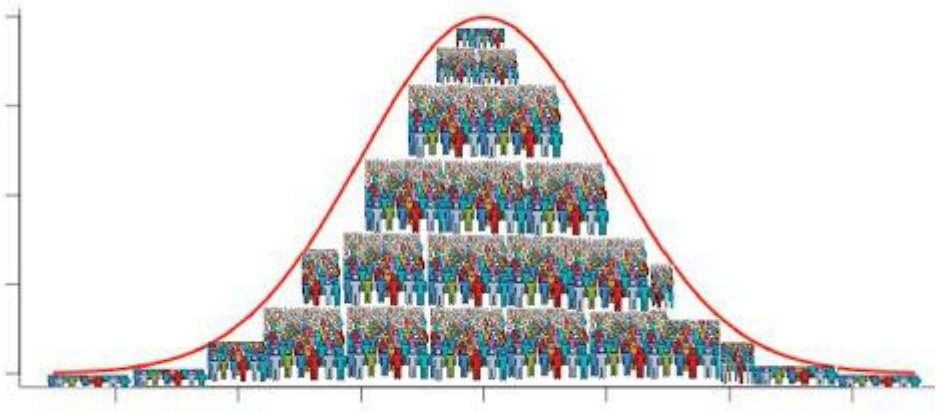
那些模型设计者说，那是牛顿的思想，已经从趋于无穷大变成趋于常数了，你还说不够？

是的！不够！得病者不可能一直保持某常数，简单地回怼是：你难道还不让那些得病者百年以后老死？得病者人数一定是一个产生，发展，减弱，消亡的过程。任何事物都是这样的生长消亡过程。不可能保持常数。

3. 高斯模型，泊松模型或 beta 模型

患病人数曲线一定像一座山。可能有几个山头构成，简化以后可以看成一个山头，类似高斯函数的形式，当然更为简单地可以写成：一个常数 A 乘以 t 的平方再乘以 (T-t) 的平方，其中 T 为病疫终止点。高斯分布是对称的，即病情的发展与病情的减弱是对称的。Poisson 更为仔细地研究了这个问题，他是从顾客排队的长度入手研究这样相似的问题。他认为患病人数应该可以写成常数 A 乘以 t 的 k 次方再乘以 Exp(bt)。也可以简化成 Beta 分布，常数 A 乘以 t 的 k 次方再乘以 (T-t) 的 l 次方。也就是说，那座山可能不是对称的，可能偏向一边，歪向一边。

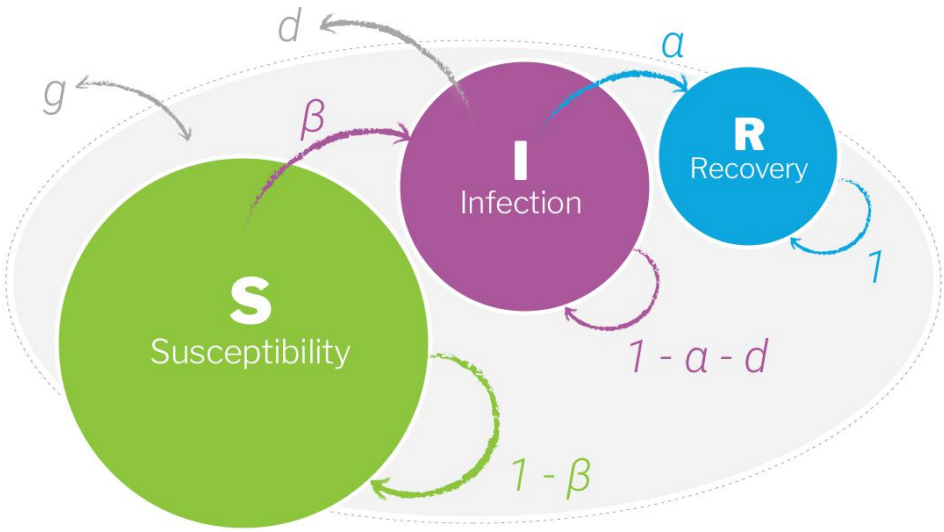
人们可以取不同的系数，次数来画出不同的曲线，用以拟合已知的数据，从而分析发展的可能性，找出那座山的方向，偏向度，更为重要的是那座山究竟有多大？



4. 传染病微分方程模型

也称为动力系统模型。所谓的抓住主要矛盾与主要矛盾方面的微分方程关系。根据病毒的发展力度，反病毒的措施时间力度。列出微分方程，模拟病毒的发展过程。这类方程，通常是与时俱进的，譬如，有了封城的决定，实施封城动作的时间点，间隔，都会对后续发展产生极大的影响。

置信区间：对于新型冠状病毒的预测，这是一个概率估计问题，给出的任何答案，都应该有一个置信区间。也就是以多大的把握可以相信这个答案。如果一个研究结果告诉我说，3 天后的得病人数是多少多少，我一般是不会看的。因为你都没有告诉我，我可以以多大的程度相信你。这就是置信度，至少你要告诉我，你自己有多大的把握，给出这些结论。而且不是这样发展的概率也是存在的。这称为小概率事件，也就是不大会发生的事件，但还是可能会发生的。在学习概率论的时候，老师曾说过，小概率事件一定发生。譬如扔骰子，不扔出 6 就给你台面上的钱翻倍，但你至少扔 6 次，只要一次是 6，你就得把台面上的钱翻倍还我。在想一下，如果你至少要玩 10 次会是什么结果？那你输的概率就非常大了。



5. 学习，深度学习模型

上述微分方程动力系统的方法，一般解空间或解的表达形式可以与第 3 节中的方法建立对应。比较困难的是：究竟那些项是主要矛盾与主要矛盾方面？学习，则是从数据出发，学习得到，哪些是关键重要的项？什么是这些项之间的关系？

6. 方法的融合，叠加与创新。

上面的方法，都是假设过程曲线是一个山头。事实上，一个新的措施，一个新的药品或者一个毒王，都会极大地改变曲线的走向，呈现多山头的现象。一般要采用多种方法的融合叠加，可不一定是线性叠加哦。在这里就有许多期待创新的想法。

2020.02.06　于香港
2020.02.12　修改 于香港