优美的贝济埃曲线

陈 伟

摘要： 皮埃尔·贝济埃（Pierre Bézier, 1910.9.1–1999.11.25），法国著名工程师与数学家，现代计算机辅助设计（CAD）先驱。1933 年入职雷诺汽车公司，以长达 42 年的职业生涯主导三次工业技术革命：工具自动化系统开发（1930 年代）、数控技术实践（1950 年代）以及参数化几何建模技术突破（1960 年代）。二战期间，雷诺工厂被纳粹德军强征为军备生产基地，贝济埃秘密参与法国抵抗运动，并在此期间构思自动化生产技术，为战后工业重建储备关键技术。

20 世纪 50–60 年代，全球汽车、船舶、飞机等工业面临产品外形曲面设计的核心瓶颈——传统依赖手工绘图、石膏模型与木质模具的制造流程效率低下，且难以与新兴数控机床实现数据兼容。贝济埃领衔的 UNISURF 项目以数学理论突破化解了这一困局：通过将伯恩斯坦多项式理论与计算机算法结合，首次实现自由曲面从参数化建模到数控加工的全流程数字化。这套系统不仅成为现代 CAD 工业标准（如 CATIA , AutoCAD）的算法基石，更开创了“数学驱动设计”的新范式。

值得注意的是，贝济埃曲线[1]理论的核心——通过控制点定义光滑曲线的多项式函数，其数学本质可追溯至俄国数学家谢尔盖·伯恩斯坦在 1912 年提出的多项式逼近理论。这一发现揭示了科学史上一个典型现象：纯粹数学理论往往超前于实际应用数十年。伯恩斯坦当初构造多项式仅为证明魏尔斯特拉斯逼近定理，却未预见其在工业设计中的革命性价值；而贝济埃通过工程实践需求，将这些“沉睡”的数学工具转化为改变制造业面貌的利刃。

本案例深刻展现了数学理论研究与工程应用之间“超前储备”与“滞后激活”的辩证关系。本文试图通过解析贝济埃曲线的理论源流与技术转化路径，引发读者对基础科学研究价值的再思考：那些看似“无用”的数学创造，或许正孕育着颠覆未来的技术种子。

[1] Bézier 曲线有着多种中文音译，包括“贝济埃曲线”“贝齐尔曲线”“贝兹曲线”等，广为流传的“贝塞尔曲线”其实是一个完全错误的术语。贝塞尔（Friedrich Bessel）是德国天文学家和数学家，天体测量学的奠基人。天文学术语中有由他推算的贝塞尔日数、贝塞尔公式、贝塞尔素数等；数学术语中有贝塞尔函数；地球形状理论研究中有贝塞尔椭球，但是作为数学家的贝塞尔并没有曲线和曲面的研究成果。全国科学技术学名词审定委员会 1993 年公布的《数学名词》中，将“Bessel function”确定为“贝塞尔函数”。2002 年公布的《计算机科学技术名词》中，将“Bézier curve”确定为“贝济埃曲线”，两者区分很清晰。

1. 被人遗忘的伯恩斯坦多项式

在数学分析中，有一个著名的魏尔斯特拉斯逼近定理（1885 年）：

定理 1 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则存在多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 或者说，对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 $P(x)$, 使得

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon$$

对一切 $x \in [a,b]$ 成立。

魏尔斯特拉斯逼近定理说明了任何连续函数都可以用更简单的函数来一致逼近。由于多项式具有结构简单而且方便数值计算的特点，因此用多项式作为逼近函数就成为关注的重点。

另一方面，我们注意到，上述魏尔斯特拉斯逼近定理是关于“存在性”的定理。人们为了证明它，也就是千方百计地讲清楚“一定有”这样的多项式存在，而至于“能不能具体找到一个”，并不是该定理所必须的。鉴于该定理的重要性，除了魏尔斯特拉斯本人之外，陆续有很多数学家给出了不同的证明方法，各有高明之处。其中，俄国数学家伯恩斯坦（Sergei Bernstein）在 1912 年给出了一个漂亮的证明，而且是属于“具体拿出一个给你看”的那种构造性证明。

(a) 卡尔·魏尔斯特拉斯（1815–1897），德国数学家，函数论的奠基人

(b) 谢尔盖·伯恩斯坦（1880–1968），俄国数学家，苏联科学院院士

为了证明魏尔斯特拉斯逼近定理，伯恩斯坦是这么干的：

不失一般性，设 $[a,b]$ 为 $[0,1]$, 那么在区间 $[0,1]$ 上，当给定任意一个连续函数 $f(x)$ 之后，对正整数 n, 我们能够得到如下 $n+1$ 个数：

$$f\left(\tfrac{0}{n}\right), f\left(\tfrac{1}{n}\right), f\left(\tfrac{2}{n}\right), \cdots, f\left(\tfrac{n}{n}\right).$$

于是，以这 n 个数作为系数，分别配上一个基函数，得到如下的结果

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) b_i^n(x), \; 0 \le x \le 1,$$

其中，$b_i^n(x)$称为 n 次伯恩斯坦基函数，它的数学表达式为

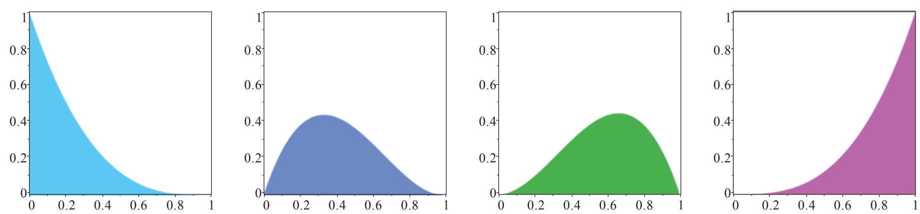
$$b_i^n(x) = \binom{i}{n} x^i (1-x)^{n-i}, \; i = 0, 1, \cdots, n.$$

图 1 与图 2 分别为 $n = 3$ 次与 $n = 4$ 次伯恩斯坦基函数图像。

因为这 $n + 1$ 个基函数都是 n 次多项式，从而 $B_n(x)$ 也是一个 n 次多项式。为了说明 $B_n(x)$ 是对函数 $f(x)$ 的逼近，将 $B_n(x)$ 记作 $B_n(f;x)$, 并称其为**伯恩斯坦多项式**。随后，伯恩斯坦证明了，$B_n(f;x)$ 在区间 $[0,1]$ 上一致收敛到 $f(x)$. 也就是说，当 $n \to \infty$ 时，$B_n(f;x) \to f(x)$, 而且这种逼近具有一致性。显然这一命题的成立也就隐含了魏尔斯特拉斯逼近定理。因为对于任意指定的 $\varepsilon > 0$, 总可以找到一个充分大的 N, 使得当 $n \ge N$ 时恒有

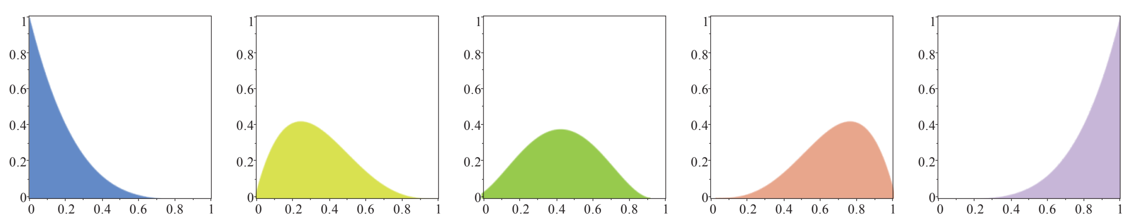
$$\max_x |B_n(f;x) - f(x)| < \varepsilon.$$

换句话说，魏尔斯特拉斯逼近定理中所主张的 $P(x)$, 只要取这里的伯恩斯坦多项式 $B_n(f;x)(n \ge N)$ 即可。这当然是非常漂亮的结论。



(a) $b_0^3(x)$ (b) $b_1^3(x)$ (c) $b_2^3(x)$ (d) $b_3^3(x)$

图 1. 伯恩斯坦基函数（$n = 3$ 次）



(a) $b_0^4(x)$ (b) $b_1^4(x)$ (c) $b_2^4(x)$ (d) $b_3^4(x)$ (e) $b_4^4(x)$

图 2. 伯恩斯坦基函数（$n = 4$ 次）

为了更具体地了解伯恩斯坦多项式，我们不妨看一看它对一些简单函数的逼近结果。

根据恒等式

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

可以证明，当被逼近函数 $f(x) = 1$ 或 $f(x) = x$ 时，其伯恩斯坦多项式恰好就是函数本身。也就是说，伯恩斯坦多项式对一切线性函数能够做到精确逼近，没有任何误差。如果将 $B_n(f;\, x)$ 看作对函数 $f(x)$ 的变换，也就是说，任意线性函数是该变换的不动点。

我们不禁要问，伯恩斯坦多项式对其他函数（比如更高次的多项式函数）是否也能精确逼近？答案是令人沮丧的，伯恩斯坦多项式不但对这些函数很难实现精确逼近，而且逼近的速度十分缓慢。这是什么意思呢？我们以逼近 x^2 这么一个简单的函数为例，容易计算得到

$$0 \le B_n(x^2;x) - x^2 = \frac{1}{n}x(1-x) \le \frac{1}{4n},$$

这也就是说，当用伯恩斯坦多项式逼近 x^2 时，如果要求误差不超过万分之一，那么伯恩斯坦多项式的次数起码得是 2500.

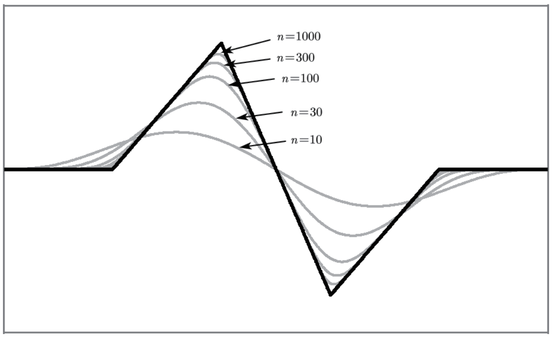


图 3. 分别用 n = 10, 30, 100, 300, 1000 次伯恩斯坦多项式逼近一个分段线性函数的结果

为了形象地展示它的这种“极其优雅的性格”，上图画出了分别用 10, 30, 100, 300 及 1000 次伯恩斯坦多项式去逼近一个分段线性函数的结果。这再次提醒人们，尽管伯恩斯坦多项式具有简单的构造和有序收敛的数学性质，但是现实世界的问题中使用数百或数千次的多项式是不切实际的，导致工程师们抱怨它“计算量堪比手工织布”。尽管必须承认，伯恩斯坦多项式所体现的数学美感一直被数学家们欣赏与赞叹，它在函数逼近理论中也始终占有一席之地，例如作为正线性算子的典型案例。然而，这种理论上的青睐一直未能转化为工程实践的价值。因此，伯恩斯坦多项式自诞生以来，由于找不到任何实际应用而逐渐被人遗忘了。

不过，具有超前见识的函数逼近论专家戴维斯（P. J. Davis）在他的《插值与逼近》一书中说到：

“当对象的形状逼近更为重要的时候，或许伯恩斯坦多项式会有其用武之地。[2]”

然而，伯恩斯坦多项式会在什么时候、什么地方找到其用武之地？

2. 曲线炼狱：前数字时代的设计之痛

当历史时针指向二十世纪五、六十年代，此时伯恩斯坦多项式仍沉睡在数学典籍里，而在工业设计领域，正悄然酝酿着一场变革。从汽车流线型车身到飞机气动外形，从船舶流体力学造型到艺术装置曲面设计，几何形态的精准控制始终是核心诉求。回溯前数字化时代的设计实践，我们可以从传统工艺中窥见技术演进的内在逻辑。

故事可以从一个汽车品牌说起，法国雪铁龙 DS（法语 Déesse，意为“女神”）。在 1955 年的巴黎车展上，雪铁龙推出全新的 DS 轿车，以取代已经服役了二十多年的主力车型 Traction Avant。DS 在亮相的那一刻就引发了轰动，闻风而至的同行、车迷与观众将雪铁龙展台围得水泄不通，要求购买的订单如同雪片般飞来——前 15 分钟就签了 743 份，平均每 1.2 秒售出一辆；第一天就收到了 12000 份订单，相当于当时法国汽车月销量的 3 倍；十天之内的订单达到 80000 份……这一纪录一直保持了 60 多年，直到 2016 年由特斯拉 Model 3 亮相首日的 180000 份订单才被打破。

图 4. 雪铁龙 DS（左）与特斯拉 Model 3（右）

DS 的火爆，绝非炒作的结果，而是自有不同凡俗之处，它引发了一场关于“汽车究竟可以多完美”的哲学思考。DS 由意大利雕塑家贝尔托尼（Flaminio

[2] This fact seems to have precluded any numerical application of Bernstein polynomials from having been made. Perhaps they will find application when the properties of the approximant in the large are of more importance than the closeness of the approximation.