聚沙成塔

——微积分三百年回眸（上）

周 楠

数学的本质就在于它的自由。

——“集合论”之父康托尔

2004 年 7 月，美国硅谷 101 号公路边上竖起了一块巨幅广告牌，内容是“{first 10-digit prime found in consecutive digits of e}.com（自然常数 e 中第一个连续 10 位的素数 .com）”。这一不同寻常的内容，迅速吸引了经过的路人。而只有学过高等数学的人才能看懂，那其实是一道相当难的数学题。一些好奇的人试着解开了这道题，当他们点开网址，看到的原来是谷歌公司的招聘广告。

作为基于强力算法的科技巨头，谷歌的创业者们，以数学之名，努力寻找与自己志同道合的人。而高等数学，以其复杂而艰深的魅力，成为了鉴别人才的试金石。

提起高等数学，网上有一句话，流传甚广：大学有一棵“树”，叫高数，很多人挂在上面。作为理工科专业必修课，高等数学曾让众多学子平时畏之如虎，考前求神拜佛，考后一片哀嚎。但它又极端重要，毕竟近现代的科技成果，都是用高等数学的语言表述的。

严格来说，高等数学的叫法过于笼统。它真正的名字，其实叫微积分（The Calculus）。

纵观数学发展史，毫不夸张地说，微积分是继欧氏几何之后，数学中最伟大的创造。尽管它创立的初衷，是为了处理当时的科学问题，然而自它诞生之日起，便宣告了一个崭新时代的到来。随后，在外部问题和内在机理的双重激化下，一代又一代的数学家们，将它逐渐拓展、加固、完善，终于建成了一座能上探天机的巴别塔。回望历史，正是以微积分为基石的科学技术，带领人类走向了星辰大海。

谷歌招聘广告

流变

微积分诞生于十七世纪，确切地说，是被当时的科学问题倒逼而生的。彼时主要的科学问题，可以归结为以下四类[1]：第一类，已知物体移动的距离，求任意时刻的速度和加速度，及其逆问题；第二类，求曲线的切线，这一问题在几何和光学上都有重要意义；第三类，求函数的最大、最小值，炮弹最远射程、行星离太阳最远距离等都属于此类问题；第四类，求曲线的长，由曲线围成的面积、体积等。

今天我们面对上述问题，嘴角可以轻轻一扬：这无非就是求导数和积分罢了。然而，对当时的科学家来说，他们手头的数学工具，仅有欧氏平面几何和尚在襁褓之中的函数论。面对这些跨越了无限和有限、曲线和直线、极大和极小的"超纲"问题，往往束手无策。好在数学家费马、开普勒和巴罗（牛顿在剑桥大学的老师）等人，做出了一些可喜的探索，为微积分的创立做好了准备。

数学和科学中的巨大突破，大都是建立在几代人一点一滴的贡献之上的，但总需要有一个人来完成最后的一步。这个人能够从前人纷乱的想法中提取精华，并在灵光乍现之间实现突破。在微积分的创立中，这个人就是伊萨克•牛顿。

众所周知，牛顿和莱布尼茨的微积分发明权之争，是数学史上著名的公案。无论是支持牛顿的人，还是支持莱布尼茨的人，都有充分的理由。面对这一争论，最好的做法，是先讲清二者的主要工作，再进行审视辨析。

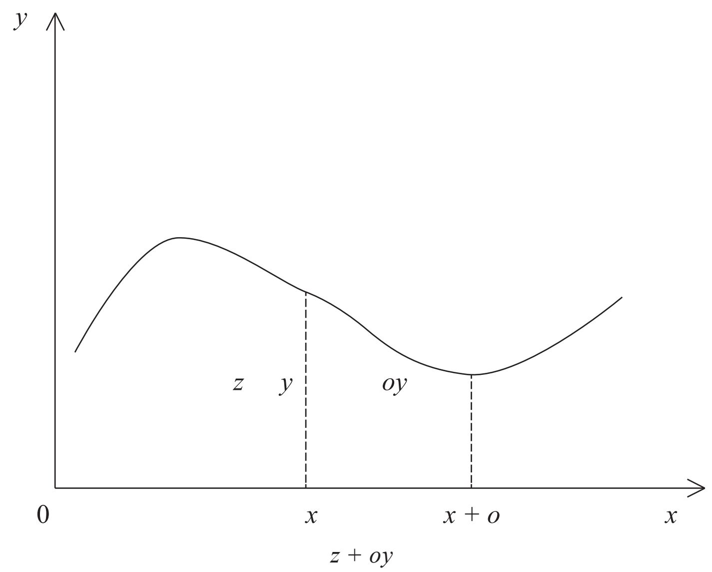
作为物理学家的牛顿，比作为数学家的牛顿，声名更为显赫。然而，当面对他的万有引力定律和三大运动定律，我们确信，没有数学家牛顿，也就没有物理学家牛顿。

[1] 克莱因著，江泽涵等译．古今数学思想 (2), 上海：上海科学技术出版社，1979, pp. 45-50.

1669 年，牛顿非正式地发表了题为《运用无穷多项方程的分析学》的小册子，这是他关于微积分的第一篇论文。在论文中，他假定有一条曲线，而曲线下的面积 z，且已知

$$z = ax^m, \tag{1}$$

其中 m 是整数或分数。



他将 x 的无限小的增量叫做 x 的瞬 (moment)，并用 o 表示；而由曲线、x 轴、y 轴、$x+o$ 处的纵坐标围成的面积，他称之为 $z+oy$，其中 oy 是面积的瞬（这一名称充分体现了牛顿天才的直觉：几百年后，人们最爱刷的微信朋友圈，英文就是 moments）。那么，

$$z + oy = a(x+o)^m = a(x^m + mx^{m-1}o + C_m^2 x^{m-2}o^2 + C_m^3 x^{m-3}o^3 + \cdots), \tag{2}$$

用（2）减去（1），用 o 除方程两边，略去仍含有 o 的项，就得到

$$y = m \cdot ax^{m-1}.$$

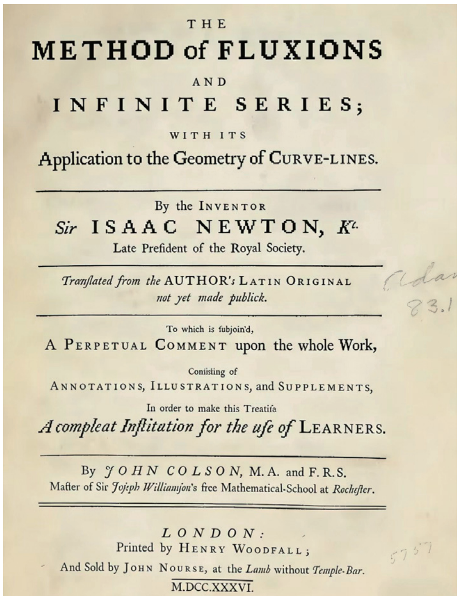
也就是说，面积 z 在任意一点 x 的变化率是曲线在 x 处的 y 值。反之，如果曲线的方程是 $y = m \cdot ax^{m-1}$, 那么，在它下面的面积就是 $z = ax^m$。

在这里，牛顿不仅给出了求一个变量 z 对于另一个变量 x 的瞬时变化率的普遍方法，而且证明了曲线下的面积可以由求变化率的逆过程得到。换句话说，面积可以由求反微分得到，这就是后来的微积分基本定理。

这一时期，瞬 o 这样的无穷小量，是牛顿用来探讨微积分的核心概念。然而，不难看出，他先用 o 再舍弃 o 的“微操”是不严谨的，无穷小量在逻辑上也不

清楚。尽管如此，新方法在解决科学问题上，还是取得了巨大胜利。

1671 年，牛顿在《流数法和无穷级数》中，对他的微积分思想做了进一步的说明。在这本书中，他认为变量是由点、线和面的连续运动产生的，而不是他早期认为的是无穷小量的静止的集合。因此，他把变量叫做流（fluent），变量的变化率叫做流数（fluxion）。对于流 x 和 y 的流数，他用$\dot{x}$和$\dot{y}$来表示；$\dot{x}$和$\dot{y}$的流数，他用$\ddot{x}$和$\ddot{y}$来表示。


THE
METHOD of FLUXIONS
AND
INFINITE SERIES;
WITH ITS
Application to the Geometry of CURVE-LINES.

By the INVENTOR
Sir ISAAC NEWTON, K^t.
Late Prefident of the Royal Society.

Tranflated from the AUTHOR's LATIN ORIGINAL
not yet made publick.

To which is fubjoin'd,
A PERPETUAL COMMENT upon the whole Work,
Confifting of
ANNOTATIONS, ILLUSTRATIONS, and SUPPLEMENTS,
In order to make this Treatife
A compleat Inftitution for the ufe of LEARNERS.

By JOHN COLSON, M.A. and F.R.S.
Mafter of Sir Jofeph Williamfon's free Mathematical-School at Rochefter.

LONDON:
Printed by HENRY WOODFALL;
And Sold by JOHN NOURSE, at the Lamb without Temple-Bar.
M.DCC.XXXVI.

《流数法和无穷级数》

与第一本小册子相比，在第二本书里，他把微积分的基本问题表述的更加清楚：已知两个流之间的关系，求它们流数之间的关系以及逆问题。既然流是随时间变化的量，瞬 o 代表了无穷小的时间间隔，那么$\dot{x}o$ 和$\dot{y}o$ 就是流 x 和 y 的无穷小增量，或者说是 x 和 y 的瞬。已知 $y = x^n$, 那么

$$y + \dot{y}o = (x+\dot{x}o)^n = x^n + nx^{n-1}\dot{x}o + C_n^2 x^{n-2}(\dot{x}o)^2 + C_n^3 x^{n-3}(\dot{x}o)^3 + \cdots$$

重复之前的“微操”，消去 $y = x^n$, 用 o 除两边，略去仍含有 o 的项，得到$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$. 用现在的符号，这个结果就是

$$dy = nx^{n-1}dx.$$

尽管上述方法与之前相比并无本质不同，在严密性上也没有任何提高，但这个等式正式宣告了微积分的诞生。他认为像 $(\dot{x}o)^2$ 和 $(\dot{x}o)^3$ 这样的项，与$\dot{x}o$ 相比是无穷小的，所以可以舍弃。至于流数的准确定义，他依旧避而不谈。

1676 年，牛顿在第三篇微积分论文《求曲边形的面积》中说，他已经放

弃了无穷小量的概念。他批评自己之前扔掉含 o 项的做法，认为最小的误差也不能忽略，而流数就是最初增量的最后的比。也就是说，如果 $y = x^n$, 当 x “流动”成为 $x + o$, y “流动”成 $y + o$. x^n 就成为

$$(x+o)^n = x^n + nx^{n-1}o + C_n^2 x^{n-2}o^2 + C_n^3 x^{n-3}o^3 + \cdots$$

y 和 x 的增量比，即 $nx^{n-1}o + C_n^2 x^{n-2}o^2 + C_n^3 x^{n-3}o^3 + \cdots$ 与 o 的比，也就是 $nx^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} o + C_n^3 x^{n-3}o^2 + \cdots$. 下一步，牛顿将“微操”进行了升级，他假设增量 o 渐渐消失，于是最初的增量最后的比即为 nx^{n-1}.

显然，这个结果与此前一致，但升级后的“微操”在逻辑上并未改进。这一假设的价值在于，他已经意识到流数的定义是什么。1726 年，在《自然哲学的数学原理》（第三版）中，牛顿给出了有生之年最为清楚的说法 :“最初的增量最后的比，严格来说，不是最后的比，而是无限减少这些量的比时所趋近的极限，在这些量无限缩小以前，既不能越过也不能达到这个极限。”[2] 用今天的符号来表示，流数

$$\dot{y} = \lim_{o \to 0} \frac{(y+o)-y}{(x+o)-x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

每一个学过微积分的人都知道，这就是导数。

一年以后，牛顿与世长辞。他的墓志铭上写着:“他几乎以神一般的思维力，最先说明了行星的运动和图像，彗星的轨道和大海的潮汐。”那一刻，物理学家牛顿与数学家牛顿，融为一体，归于沉寂。

始作

与物理学家兼数学家牛顿不同，微积分的另一位创始人，威廉 • 莱布尼茨是哲学家、法学家兼数学家。这似乎表明，想要创造划时代的丰功伟绩，非要有卓越之极的天才不可。

莱布尼茨的一生，完全配得上“卓越之极”这四个字。他兴趣广泛、知识渊博，在法学、历史、逻辑学和外交方面都成就斐然。1672 年，在牛顿建立流数的思想后，他到达巴黎履行外交使命。在此之前，他还是一个对“阅读冗长的数学证明”缺乏耐心的新手。然而，短短数年之间，他就掌握了当时最精华的数学思想，他形容自己“阅读数学文献就如同别人阅读浪漫小说一样轻松”[3]。莱布尼茨版本的微积分，已经呼之欲出。

[2] 牛顿著 , 赵振江译 . 自然哲学的数学原理 , 北京 : 商务印书馆 , 2006 , p47.

[3] M.Child, *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, Open Court Publishing Co., 1920, pp. 11-12.